

Wir wollen als erstes das in diesem Praktikum zu behandelnde Problem aus der Strömungsmechanik vorstellen und diejenigen partiellen Differentialgleichungen angeben, mit denen sich das Problem mathematisch beschreiben läßt. Als nächstes führen wir dann eine geeignete Diskretisierung der nicht exakt lösbaren Differentialgleichungen durch und entwickeln anschließend einen Algorithmus, mit dem man das gegebene Problem numerisch lösen kann.

1 Die Problemstellung

Wir wollen in diesem Praktikum *inkompressible, viskose, laminare und instationäre* Strömungen von Fluiden, d.h. von Flüssigkeiten und Gasen, behandeln und dabei einige einfache und auch kompliziertere Beispiele bearbeiten.

Inkompressibel sind Fluide wie beispielsweise Wasser, die, wie der Name schon sagt, nicht komprimierbar sind. Luft wäre hingegen ein Beispiel für ein *kompressibles* Medium, bei dem ein und dieselbe Masse unterschiedliche Volumen ausfüllen kann.

Viskosität beschreibt die Zähigkeit des Mediums. So besitzt Luft eine sehr geringe, Wasser eine etwas größere und Honig eine hohe Viskosität.

Laminar Bei nicht zu großen Geschwindigkeiten und nicht zu geringen Viskositäten sind Strömungen relativ regelmäßig und wenig Mischungintensiv, d.h., sie verhalten sich *laminar* und nicht *turbulent*. Turbulente Strömungen werden wir hier nicht betrachten.

Instationär bedeutet schließlich, daß sich die Strömung im Gegensatz zu *stationären* Strömungen mit der Zeit verändern kann.

Wir werden in diesem Praktikum also nur ein Teilgebiet der Strömungsmechanik behandeln, bei dem allerdings viele in der Strömungsmechanik vorkommenden Techniken angewendet werden.

2 Das mathematische Modell: Die Navier-Stokes-Gleichungen

Die Strömung eines Fluids in einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ($N \in \{2, 3\}$) über die Zeit $t \in [0, T]$ wird durch die folgenden Größen charakterisiert:

- das Geschwindigkeitsfeld $\vec{u} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$,

- den Druck $p : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$,
- und die Dichte $\rho : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$.

In unserem Fall der inkompressiblen, viskosen, laminaren und instationären Strömung ist die Dichte ρ konstant, d.h. $\rho(\vec{x}, t) = \rho_c = \text{const}$, so daß die Strömung durch die *Impulsleichung*

$$\frac{\partial}{\partial t} \vec{u} + (\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u} + \text{grad } p = \nu \Delta \vec{u} + \vec{g}, \quad (1)$$

und die *Kontinuitätsgleichung*

$$\text{div } \vec{u} = 0 \quad (2)$$

beschrieben wird. Das System der partiellen Differentialgleichungen (1) und (2) wird als *Navier-Stokes-Gleichungen* bezeichnet. Der Druck p ist dabei nur bis auf eine Konstante bestimmt. Die reelle Zahl ν ist der Viskositätskoeffizient, der im dimensionslosen Fall gerade dem Kehrwert der in der Strömungsmechanik wichtigen Reynoldszahl Re entspricht. $\vec{g} : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^N$ sind äußere Kräfte, z.B. die Erdanziehung oder andere Beschleunigungen, denen das System unterworfen ist.

Aufgabe 1 *Wir wollen uns zur Vereinfachung auf den zweidimensionalen Fall $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ beschränken. Formulieren Sie für diesen Fall die Navier-Stokes-Gleichungen (1) und (2), indem Sie $\vec{x} = (x, y)^T$, $\vec{u} = (u, v)^T$, $\vec{g} = (g_x, g_y)^T$ setzen, den Ausdruck $(\vec{u} \cdot \text{grad}) \vec{u}$ vereinfachen (Tipp: verwenden sie die Kontinuitätsgleichung (2) geeignet). u bezeichnet dabei die Geschwindigkeit in x -Richtung und v die Geschwindigkeit in y -Richtung.*

Im folgenden betrachten wir nur noch den zweidimensionalen Fall (vgl. Aufgabe 1) auf dem Rechteck $\Omega = [0, a] \times [0, b]$ und im Zeitintervall $[0, T]$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ sind Anfangsbedingungen $u = u_0(x, y)$ und $v = v_0(x, y)$ vorgegeben, die die Kontinuitätsgleichung (2) erfüllen. Weiter sind zu allen Zeitpunkten $t \in [0, T]$ Randbedingungen an den vier Gebietsrändern erforderlich, so daß wir insgesamt ein Anfangs-Randwertproblem erhalten. Für die Formulierung der Randbedingungen bezeichne w_1 die Geschwindigkeitskomponente senkrecht zum Rand (in Normalenrichtung), w_2 die Geschwindigkeitskomponente parallel zum Rand (in Tangentialrichtung) und $\partial w_1 / \partial n$ bzw. $\partial w_2 / \partial n$ die Ableitung in Normalenrichtung. Am senkrechten Rand von Ω gilt also

$$w_1 = u, \quad w_2 = v, \quad \frac{\partial w_1}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial w_2}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial x},$$

und am waagerechten Rand

$$w_1 = v, \quad w_2 = u, \quad \frac{\partial w_1}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial w_2}{\partial n} = \frac{\partial u}{\partial y}.$$

Für Punkte (x, y) des festen Randes $\Gamma := \partial\Omega$ sind folgende Randbedingungen möglich:

Haftbedingung (no-slip) Es dringt kein Fluid durch die Wand, und das Fluid haftet am Rand, d.h.

$$w_1(x, y) = 0, \quad w_2(x, y) = 0 \quad \text{für } (x, y) \in \Gamma = \partial\Omega.$$

Rutschbedingung (free-slip) Es dringt kein Fluid durch die Wand, und im Gegensatz zur Haftbedingung gibt es entlang des Randes keine Reibungsverluste, d.h.

$$w_1(x, y) = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial n}(x, y) = 0 \quad \text{für } (x, y) \in \Gamma = \partial\Omega.$$

Einströmbedingung (inflow) Beide Geschwindigkeiten sind fest vorgegeben, d.h.

$$w_1(x, y) = w_1^0, \quad w_2(x, y) = w_2^0,$$

wobei die Werte w_1^0, w_2^0 gegeben.

Ausströmbedingung (outflow) Beide Geschwindigkeitskomponenten ändern sich nicht in der Richtung senkrecht zum Rand, d.h.

$$\frac{\partial w_1}{\partial n}(x, y) = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial n}(x, y) = 0.$$

Sind an allen Rändern die Geschwindigkeit selbst und nicht deren Normalableitungen vorgegeben, so muß zusätzlich das Randintegral über die Geschwindigkeiten senkrecht zum Rand Null sein, also die Bedingung

$$\int_{\Gamma} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \cdot \vec{n} \, ds = 0 \quad (3)$$

gelten.

Beispiel 1 1. Im ersten Beispiel sind vier Wände mit Haftbedingungen gegeben. Die obere Wand bewegt sich mit konstanter Geschwindigkeit nach rechts, d.h., es gilt $w_2 = w_2^0 = \text{const}$ am oberen Rand, im Gegensatz zu $w_2 = 0$ bei gewöhnlichen Haftbedingungen.

2. Das zweite Beispiel zeigt die Strömung über einen schrägen Balken (Streichlinien). Von dem linken Rand strömt Fluid herein (inflow), an dem rechten Rand strömt es heraus (outflow), und oben und unten befinden sich starre Wände (no-slip).

Wählt man die Randbedingungen physikalisch richtig, so erhalten wir insgesamt ein „gut gestelltes“ Problem (well-posed problem), das eine eindeutige Lösung besitzt. Diese Lösung ist jedoch im allgemeinen Fall nicht analytisch berechenbar, d.h., sie kann nicht in einer geschlossenen Form angegeben werden. Daher versucht man, die Lösung numerisch zu approximieren.

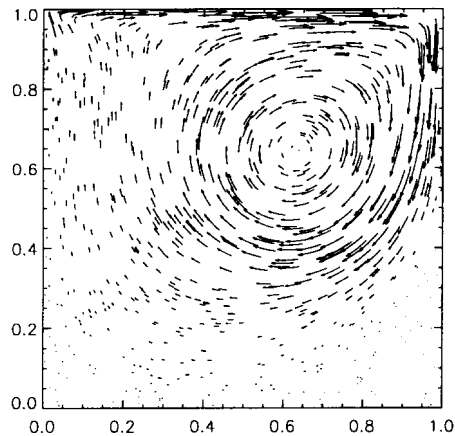


Abbildung 1: Nischenströmung (Driven Cavity)

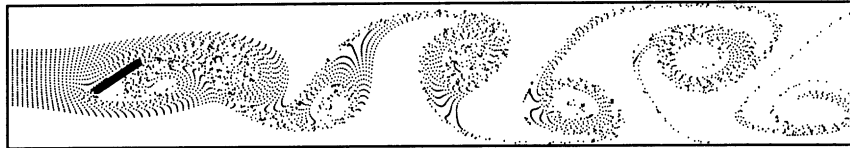


Abbildung 2: Strömung über einen schrägen Balken

3 Diskretisierung

Mit dem Begriff der Diskretisierung beschreibt man in der Numerik den Übergang von einem kontinuierlichen Problem zu einem diskreten Problem, das nur in endlich vielen Punkten betrachtet wird, also endlichdimensional ist. Diskretisierungen werden insbesondere bei der numerischen Lösung von Differentialgleichungen verwendet, indem die Differentialgleichung in ein Gleichungssystem umgewandelt wird, das die Werte der Lösungsfunktion nur an endlich vielen Punkten des Lösungsgebietes näherungsweise bestimmt. Wir wollen im folgenden die Methode der Finiten Differenzen verwenden. Dazu überdecken wir das Gebiet $\Omega = [0, a] \times [0, b] \subset \mathbb{R}^2$ durch ein Gitter und betrachten das zu lösende Problem statt auf dem ganzen Gebiet nur noch in den Kreuzungspunkten der Gitterlinien. Das Gitter habe in x -Richtung i_{max} und in y -Richtung j_{max} Zellen der gleichen Größe, so daß die Gitterlinien die Abstände

$$\delta x = \frac{a}{i_{max}}, \quad \delta y = \frac{b}{j_{max}}$$

besitzen. Die Zelle mit dem Index (i, j) entspricht dann dem Gebiet

$$[(i - 1)\delta x, i\delta x] \times [(j - 1)\delta y, j\delta y].$$

Im Fall der Navier-Stokes-Gleichungen wird zur Diskretisierung des Gebietes Ω aus Stabilitätsgründen häufig ein versetztes Gitter („staggered grid“) verwendet, bei dem die verschie-

denen gesuchten Variablen nicht in denselben Gitterpunkten liegen. Wir verwenden ein Gitter, in dem der Druck p nur in den Mittelpunkten der Zellen, die Geschwindigkeit u nur in den Mittelpunkten der senkrechten Zellkanten und die Geschwindigkeit v nur in den Mittelpunkten der waagrechten Zellkanten betrachtet wird. Den Index (i, j) tragen der Druck im Mittelpunkt der Zelle (i, j) , die u -Geschwindigkeit an der rechten Kante und die v -Geschwindigkeit an der oberen Kante der Zelle (i, j) . Der Druck $p_{i,j}$ liegt also bei den Koordinaten $((i - \frac{1}{2})\delta x, (j - \frac{1}{2})\delta y)$, die Geschwindigkeiten $u_{i,j}$ bei den Koordinaten $(i\delta x, (j - \frac{1}{2})\delta y)$ und $v_{i,j}$ bei den Koordinaten $((i - \frac{1}{2})\delta x, j\delta y)$ (vgl. Abbildung 3).

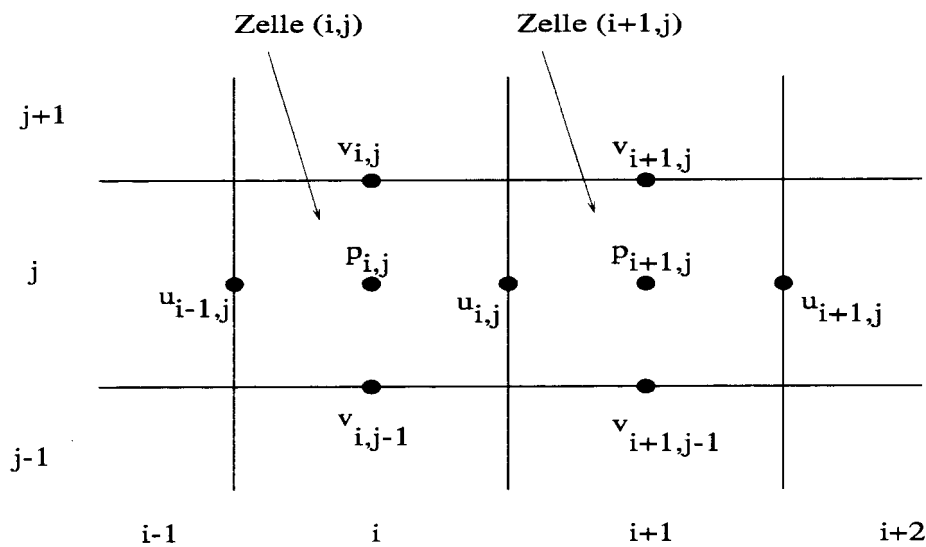


Abbildung 3: Staggered Grid

Die Punkte für u , v und p gehören also zu drei, hier nicht dargestellten Gittern, die jeweils um eine halbe Maschenweite nach unten, nach links bzw. nach links unten versetzt sind. Infolgedessen kommen nicht alle Werte auf dem Rand des Gebietes zu liegen. So gibt es etwa auf den senkrechten Rändern keine v -Werte und auf den waagrechten Rändern keine u -Werte. Daher wird noch eine Randschicht aus Gitterzellen mitgeführt (vgl. Abbildung 4), so daß die Randbedingungen durch eine Mittelung der nächstliegenden Werte erfüllt werden können (siehe Unterabschnitt über „Die Randwerte für die diskreten Gleichungen“ im nächsten Kapitel). Die Navier-Stokes-Gleichungen werden jetzt folgendermaßen diskretisiert: Als erstes wollen wir die Ortsableitungen behandeln. Die Impulsgleichung (1) wird in den Mittelpunkten der senkrechten und waagrechten Kanten und die Kontinuitätsgleichung (2) in den Zellmitten ausgewertet. Die Ausdrücke in Gleichung (1) ersetzen wir am Mittelpunkt der rechten

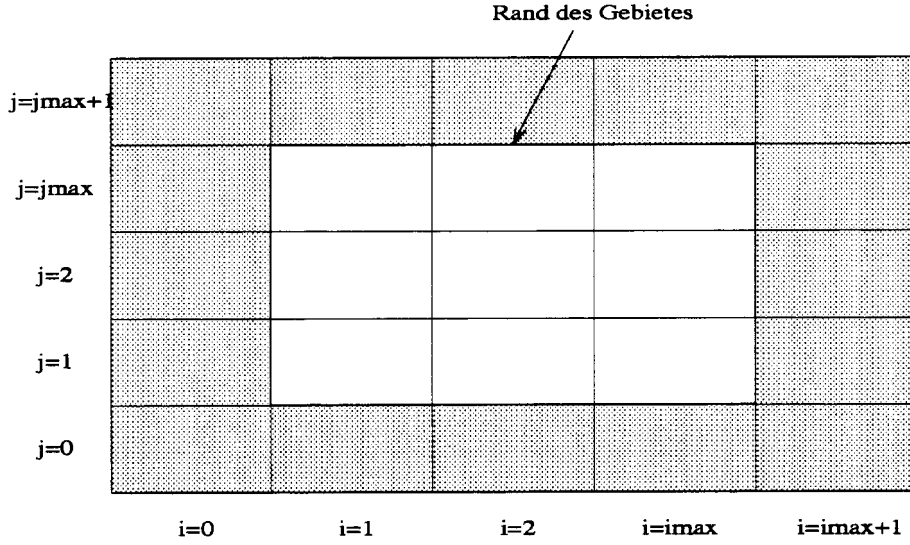


Abbildung 4: Gebiet mit Randzellen

Kante der Zelle (i, j) , $i = 1, \dots, imax - 1$, $j = 1, \dots, jmax$ durch

$$\left[\frac{\partial(u^2)}{\partial x} \right]_{i,j} := \frac{1}{\delta x} \left(\left(\frac{u_{i,j} + u_{i+1,j}}{2} \right)^2 - \left(\frac{u_{i-1,j} + u_{i,j}}{2} \right)^2 \right) + \alpha \frac{1}{\delta x} \left(\frac{|u_{i,j} + u_{i+1,j}|}{2} \frac{u_{i,j} - u_{i+1,j}}{2} - \frac{|u_{i-1,j} + u_{i,j}|}{2} \frac{u_{i-1,j} - u_{i,j}}{2} \right), \quad (4)$$

$$\left[\frac{\partial(uv)}{\partial y} \right]_{i,j} := \frac{1}{\delta y} \left(\frac{v_{i,j} + v_{i+1,j}}{2} \frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2} - \frac{v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1}}{2} \frac{u_{i,j-1} + u_{i,j}}{2} \right) + \alpha \frac{1}{\delta y} \left(\frac{|v_{i,j} + v_{i+1,j}|}{2} \frac{u_{i,j} - u_{i,j+1}}{2} - \frac{|v_{i,j-1} + v_{i+1,j-1}|}{2} \frac{u_{i,j-1} - u_{i,j}}{2} \right) \quad (5)$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{i,j} := \frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{(\delta x)^2}, \quad (6)$$

$$\left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]_{i,j} := \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{(\delta y)^2}, \quad (7)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial x} \right]_{i,j} := \frac{p_{i+1,j} - p_{i,j}}{\delta x}, \quad (8)$$

und am Mittelpunkt der oberen Kante der Zelle (i, j) für $i = 1, \dots, imax$ und $j = 1, \dots, jmax - 1$ durch

$$\left[\frac{\partial(v^2)}{\partial y} \right]_{i,j} := \frac{1}{\delta y} \left(\left(\frac{v_{i,j} + v_{i,j+1}}{2} \right)^2 - \left(\frac{v_{i,j-1} + v_{i,j}}{2} \right)^2 \right) + \alpha \frac{1}{\delta y} \left(\frac{|v_{i,j} + v_{i,j+1}|}{2} \frac{v_{i,j} - v_{i,j+1}}{2} - \frac{|v_{i,j-1} + v_{i,j}|}{2} \frac{v_{i,j-1} - v_{i,j}}{2} \right), \quad (9)$$

$$\left[\frac{\partial(uv)}{\partial x} \right]_{i,j} := \frac{1}{\delta x} \left(\frac{u_{i,j} + u_{i,j+1}}{2} \frac{v_{i,j} + v_{i+1,j}}{2} - \frac{u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1}}{2} \frac{v_{i-1,j} + v_{i,j}}{2} \right) + \alpha \frac{1}{\delta x} \left(\frac{|u_{i,j} + u_{i,j+1}|}{2} \frac{v_{i,j} - v_{i+1,j}}{2} - \frac{|u_{i-1,j} + u_{i-1,j+1}|}{2} \frac{v_{i-1,j} - v_{i,j}}{2} \right) \quad (10)$$

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right]_{i,j} := \frac{v_{i+1,j} - 2v_{i,j} + v_{i-1,j}}{(\delta x)^2}, \quad (11)$$

$$\left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]_{i,j} := \frac{v_{i,j+1} - 2v_{i,j} + v_{i,j-1}}{(\delta y)^2}, \quad (12)$$

$$\left[\frac{\partial p}{\partial y} \right]_{i,j} := \frac{p_{i,j+1} - p_{i,j}}{\delta y}. \quad (13)$$

Der Parameter α liegt dabei zwischen 0 und 1. Für $\alpha = 0$ erhält man für die Differentialoperatoren eine Approximation 2. Ordnung, d.h., der Approximationsfehler hat die Genauigkeit $O(\frac{1}{(\delta x)^2})$ bzw. $O(\frac{1}{(\delta y)^2})$. Diese Approximation kann jedoch für geringe Viskositätswerte, oder wenn die Ableitungsterme $\frac{\partial}{\partial x}$ bzw. $\frac{\partial}{\partial y}$ mit wesentlich größeren Faktoren in das Problem eingehen als die Ableitungsterme $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ und $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$, zu Oszillationen in der Lösung führen. In solchen Fällen muß das sogenannte Donor-Cell-Schema ($\alpha = 1$) verwendet werden, das nur eine Approximation 1. Ordnung liefert. In der Praxis benutzt man eine Mischung aus beiden Verfahren mit $\alpha \in [0, 1]$. Der Parameter α sollte dabei so gewählt werden, daß die Ungleichung

$$\alpha \geq \max_{i,j} \left(\left| \frac{u_{i,j} \delta t}{\delta x} \right|, \left| \frac{v_{i,j} \delta t}{\delta y} \right| \right)$$

erfüllt ist.

Die Ortsableitungen in der Kontinuitätsgleichung (2) im Mittelpunkt der Zelle (i, j) , $i = 1, \dots, imax$, $j = 1, \dots, jmax$, werden durch die Ausdrücke

$$\left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_{i,j} := \frac{u_{i,j} - u_{i-1,j}}{\delta x}, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial y} \right]_{i,j} := \frac{v_{i,j} - v_{i,j-1}}{\delta y} \quad (14)$$

ersetzt.

Abschließend ist noch die Diskretisierung der Zeitableitungen $\frac{\partial u}{\partial t}$ und $\frac{\partial v}{\partial t}$ vorzunehmen. Dazu wird das Zeitintervall $[0, T]$ in gleiche Teilintervalle $[n\delta t, (n+1)\delta t]$, $n = 0, 1, \dots, \frac{T}{\delta t} - 1$ zerlegt. Die diskreten Werte für u , v und p werden also nur zu den Zeitpunkten $n\delta t$ betrachtet. Zur Diskretisierung der Zeitableitungen zum Zeitpunkt t_{n+1} verwenden wir das Euler-Verfahren, also Differenzenquotienten 1. Ordnung

$$\left[\frac{\partial u}{\partial t} \right]^{(n+1)} := \frac{u^{(n+1)} - u^{(n)}}{\delta t}, \quad \left[\frac{\partial v}{\partial t} \right]^{(n+1)} := \frac{v^{(n+1)} - v^{(n)}}{\delta t}, \quad (15)$$

wobei der obere Index n den Zeitpunkt kennzeichnen soll. Die Kontinuitätsgleichung (2) wird zum Zeitpunkt $n + 1$ ausgewertet. Dieses entspricht einem expliziten Zeitschritt-Verfahren mit Hilfe der Euler-Formel. Es gibt auch implizite Verfahren, bei denen auf der rechten Seite auch Werte zum Zeitpunkt $n + 1$ vorkommen. Diese erlauben im allgemeinen wesentlich größere Zeitschritte, allerdings muß dann in jedem Zeitschritt ein lineares oder nichtlineares Gleichungssystem gelöst werden.

4 Der Algorithmus

Das gesamte Lösungsverfahren setzt sich nun aus den folgenden Einzelschritten zusammen:

4.1 Die Zeitschleife

Mit den gegebenen Anfangswerten für u und v wird in einer äußeren Zeitschleife, beginnend beim Zeitpunkt $t = 0$, die Zeit solange um δt erhöht, bis die Endzeit T erreicht ist. Im Zeitschritt n ($n = 0, 1, \dots$) werden die Differentialgleichungen wie oben beschrieben diskretisiert. Dabei seien die Werte zum Zeitpunkt n bereits bekannt, und die Werte zum Zeitpunkt $n + 1$ sollen berechnet werden.

4.2 Die diskreten Impulsgleichungen

Die diskreten Impulsgleichungen, die man durch Einsetzen der Diskretisierungen in die Gleichung (1) erhält (vgl. Aufgabe (1)), werden nun so umgestellt, daß auf der linken Seite nur noch die Geschwindigkeit $u_{i,j}^{(n+1)}$ bzw. $v_{i,j}^{(n+1)}$ stehen. Der Druck $p_{i,j}^{(n+1)}$ wird ebenfalls zum Zeitpunkt t_{n+1} ausgewertet. Dann erhalten die Gleichungen die Form

$$u_{i,j}^{(n+1)} = F_{i,j}^{(n)} - \frac{\delta t}{\delta x} (p_{i+1,j}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}) \quad (16)$$

für $i = 1, \dots, imax - 1$, $j = 1, \dots, jmax$ und

$$v_{i,j}^{(n+1)} = G_{i,j}^{(n)} - \frac{\delta t}{\delta y} (p_{i,j+1}^{(n+1)} - p_{i,j}^{(n+1)}) \quad (17)$$

für $i = 1, \dots, imax$, $j = 1, \dots, jmax - 1$.

Die Terme $F_{i,j}^{(n)}$ beinhalten die in den diskreten Impulsgleichungen vorkommenden Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt n . Mit den diskretisierten Ausdrücken aus dem vorhergehenden Abschnitt sind dies zum Zeitpunkt n :

$$F_{i,j} = u_{i,j} + \delta t \left(\nu \left(\left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right]_{i,j} + \left[\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]_{i,j} \right) - \left[\frac{\partial(u^2)}{\partial x} \right]_{i,j} - \left[\frac{\partial(uv)}{\partial y} \right]_{i,j} + g_x \right) \quad (18)$$

für $i = 1, \dots, imax - 1$, $j = 1, \dots, jmax$ und

$$G_{i,j} = v_{i,j} + \delta t \left(\nu \left(\left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right]_{i,j} + \left[\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]_{i,j} \right) - \left[\frac{\partial(v^2)}{\partial y} \right]_{i,j} - \left[\frac{\partial(uv)}{\partial x} \right]_{i,j} + g_y \right) \quad (19)$$

für $i = 1, \dots, imax$, $j = 1, \dots, jmax - 1$.

4.3 Die Druckgleichung

Jetzt können wir die Geschwindigkeiten $u_{i-1,j}^{(n+1)}$, $u_{i,j}^{(n+1)}$, $v_{i,j-1}^{(n+1)}$ und $v_{i,j}^{(n+1)}$ in die diskrete Kontinuitätsgleichung der Zelle (i, j) einsetzen und erhalten eine Gleichung, die nur noch Druckwerte zum Zeitpunkt $n + 1$ und (bereits bekannte) Geschwindigkeiten zum Zeitpunkt n enthält.

Aufgabe 2 Stellen Sie die diskrete Druckgleichung auf!

Diese diskrete Gleichung ist die bekannte Form einer diskretisierten Poisson-Gleichung für die Größe $p^{(n+1)}$

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2} = f$$

auf dem Gebiet Ω mit einer gegebenen rechten Seite f . Zur eindeutigen Lösbarkeit benötigen wir aber noch Randwerte für den Druck (für $i = 0, imax + 1, j = 0, jmax + 1$), die wir aus den Impulsgleichungen am Rand gewinnen können (siehe nächsten Abschnitt). Jetzt ist es möglich, die Druckgleichung mit einem beliebigen Verfahren zur Lösung linearer Gleichungssysteme zu lösen (z.B. mit dem SOR-Verfahren). In unserem Fall ist es sinnvoll, die Druckwerte $p^{(n)}$ zum Zeitpunkt n als Startwerte der Iteration zur Berechnung der Druckwerte $p^{(n+1)}$ zu verwenden. Mit den so berechneten Druckwerten zum Zeitpunkt $n + 1$ können dann auch die Geschwindigkeitswerte u und v zum Zeitpunkt $n + 1$ gemäß (16) und (17) berechnet werden.

Aufgabe 3 Formulieren Sie den Algorithmus für das SOR-Verfahren, und beschreiben Sie das Verfahren und seine Eigenschaften.

4.4 Die Randwerte für die diskreten Gleichungen bei Haftbedingungen

Wir benötigen für u, v und p noch die Randbedingungen für die diskreten Gleichungen. Da wir in unserem ersten Beispiel nur Haftbedingungen verwenden wollen, soll hier zunächst nur auf diese eingegangen werden. Die anderen Typen von Randbedingungen werden wir später behandeln. Bei der Berechnung von $F_{i,j}$ und $G_{i,j}$ nach (18) und (19) wird für $i = 1, \dots, imax$ und $j = 1, \dots, jmax$ auf u - und v -Werte zugegriffen, die auf dem Gebietsrand oder sogar außerhalb liegen können. Da die kontinuierlichen Geschwindigkeiten am Rand gemäß der Haftbedingung jeweils 0 sein sollen, setzen wir für die Werte, die direkt auf dem Rand liegen

$$u_{0,j} = 0, \quad u_{imax,j} = 0, \quad j = 1, \dots, jmax,$$

$$v_{i,0} = 0, \quad v_{i,jmax} = 0, \quad i = 1, \dots, imax.$$

Da weiterhin auf den senkrechten Rändern keine v -Werte und auf den waagrechten Rändern keine u -Werte liegen, wird hier der Randwert 0 durch eine Mittelung der Werte zu beiden Seiten des Randes erzielt (vgl. Abbildung 5):

$$v_r := \frac{v_a + v_i}{2} = 0 \implies v_a = -v_i.$$

Wie erhalten daher die weiteren Bedingungen an den vier Rändern des Gebietes Ω :

$$v_{0,j} = -v_{1,j}, \quad v_{imax+1,j} = -v_{imax,j} \quad \text{für } j = 1, \dots, jmax, \quad (20)$$

$$u_{i,0} = -u_{i,1}, \quad u_{i,jmax+1} = -u_{i,jmax} \quad \text{für } i = 1, \dots, imax. \quad (21)$$

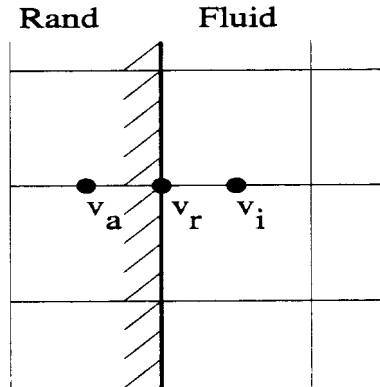


Abbildung 5: Erläuterung der Randbedingungen

Außerdem werden noch Randbedingungen für den Druck benötigt. Diese ergeben sich aus den Impulsgleichungen am Rand und lauten

$$p_{0,j} = p_{1,j}, \quad p_{imax+1,j} = p_{imax,j}, \quad (22)$$

für $j = 1, \dots, jmax$ und

$$p_{i,0} = p_{i,1}, \quad p_{i,jmax+1} = p_{i,jmax} \quad (23)$$

für $i = 1, \dots, imax$. Weil bei der Berechnung der rechten Seite für die Druckgleichung in Randnähe auch auf die Werte von $F_{i,j}$ und $G_{i,j}$ auf dem Rand zugegriffen wird, müssen auch diese geeignet modifiziert werden. Analog zu den Druckwerten am Rand ergibt sich für $j = 1, \dots, jmax$

$$F_{0,j} = u_{0,j}, \quad F_{imax,j} = u_{imax,j}, \quad (24)$$

und für $i = 1, \dots, imax$

$$G_{i,0} = v_{i,0}, \quad G_{i,jmax} = v_{i,jmax}. \quad (25)$$

4.5 Die Stabilitätsbedingung

Um die Stabilität des numerischen Algorithmus zu gewährleisten und keine Oszillationen zu erzeugen, müssen die folgenden drei Stabilitätsbedingungen an die Schrittweiten δx , δy und δt gestellt werden:

$$2\nu\delta t < \frac{(\delta x)^2(\delta y)^2}{(\delta x)^2 + (\delta y)^2}, \quad |u_{max}|\delta t < \delta x, \quad |v_{max}|\delta t < \delta y. \quad (26)$$

Die letzten beiden Bedingungen sind die bekannten Courant-Friedrichs-Levi-Bedingungen (CFL-Bedingungen). Sie bedeuten, daß kein Partikel des Fluids in der Zeit δt mehr als eine Gitterweite δx oder δy zurücklegen darf. u_{max} und v_{max} sind die Maximalwerte der vorkommenden Geschwindigkeiten. Wir werden die Stabilitätsbedingungen bei unseren Beispielen dadurch erfüllen, daß wir die Schrittweiten klein genug wählen.

4.6 Zusammenfassung

Aufgabe 4 Fertigen Sie abschließend eine übersichtliche Darstellung des Algorithmus in Form eines einfachen Struktogramms oder Ablaufplanes an.